発散のないmodelの試作(3)

著者	古尾谷 泉
出版者	法政大学多摩研究報告編集委員会
雑誌名	法政大学多摩研究報告
巻	16
ページ	97-112
発行年	2001-03-30
URL	http://hdl.handle.net/10114/1580

法政大学多摩研究報告　16：97～112, 2001

発散のないmodelの試作（Ⅲ）

古尾谷　泉

An attempt toward a non-divergent model（Ⅲ）

Izumi FURUOYA

1　はじめに

いわゆる“発散の困難”といわれる問題は、古典物理の理論の枠内に、すでに潜んでいた病巣であり、現在でも、なお、すべての質点系の基礎理論においては、その構造内に、その欠陥を引きずっている。

よく知られているように、場の理論の立場で考えると、電子のもつ自己エネルギーは、その電子が放出するまわりの電磁場のエネルギーを全空間について積分したものである。そして、電子の半径を小さくしていくと、そのエネルギーは無限に大きくなってしまう。既成の理論内での処方は別として、このことをすくうごく常識的な考えは、電子に有限の大きさの半径をもたせることであろう。湯川と共同研究者は、この考えに基づいて、一つの理論を構築した。このような理論は“非局所場理論”といわれる。しかし、このような理論は質点系の理論の重ね合せであり、本質的には質点系の理論である、ことが判明した。粒子に大きさをもたせることの困難は相対性理論と両立しない点であろう。すなわち、Lorentz共変な理論を作ることが出来ないということであろう。

朝永とSchwingerは電磁量子力学を相対論的に共変な形式にかきかえた。その結果、それまで雑然としていた見通しの悪かったこの発散の問題は、次の3つの場合におこることがわかった。

1）電子の自己エネルギー、

2）電荷の大きさ、

3）ある vertex の積分

しかし、ここでは、この問題が整理されただけで解決されたわけではない。その後、素粒子物理学は大型加速器の出現により hadron physics の時代に入っていった。そして、色量子力学等の理論が誕生した。しかし、発散の問題はこれらの理論にも以然として残存し、その病巣は今だ

に除去されていない。

ここでの一連の論文では、この問題が解決できるかもしれない一つの考え—仮設—を提唱し、その考えに基づいて、簡単なtoy modelを作り、発散が除かれているかどうかを調べることである。toy modelを作るにあたって、我々は物理的真空に次のような要請をおく。

"電荷の値は相互作用によって変ってはならない恒常的な不変量"である。また、我々の問題はvan Hoveの問題やHaagの問題等にも関連していると考えられる。
これらの詳細については前論文[1]を参照されたい。

我々は、発散の問題は物理空間の構造の問題であって、dynamicsの問題ではないであろうという立場をとる。最近、weak scaleとPlank scale間の大きな喰い違いを正すために、Rachdall[2]は我々の使用した空間と類似の物理空間を提唱している。その空間はKalza-Klein型であって、metricは

$$ds^2 = e^{-2kr\phi}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r^2 d\phi^2 \ ,$$

であたえられる空間である。kはPlank scaleの大きさの量であり、x^μは通常の時空座標、また、ϕはextra-dimensionの座標である。"warp" factor $e^{-2kr\phi}$が存在するので、両者の喰い違いを正すのに、大きなrの値は必要としない（extra-dimensionをもつcompact spaceは測定にかからないほど小さく出来るということ）。我々のmodel spaceとの大きな本質的な違いは、我々の場合には、相互作用をも同一空間にうめ込んでしまいKalza-Klein型ではないという点であろう。

2 Model space—相互作用の修正

この章の前半は前論文の概説である。ここでは、前述の真空についての要請を満すようなmodel spaceを作ろう。そのために、まず、従来の理論について、次に、それを如何に修正すべきかについて述べよう。

話を簡単にするために、最も簡単な場合として荷電bosonと電磁場との相互作用を考えよう。4次元Minkowski空間は次元を縮小して、2次元Minkowski空間とする。この空間内の一点は、x_0は時間成分、x_1は空間成分として、$(x_0\ x_1)$であらわされる。この空間のmetricは

$$\eta_{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \qquad (2-1)$$

とする、無限小距離は

$$-ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 \ , \qquad (2-2)$$

であり、（4元）速度は

$$v_0=\frac{dx_0}{ds},\quad v_1=\frac{dx_1}{ds}\quad, \tag{2-3}$$

である。また、(4元) momentumは

$$E=mv_0,\quad p=mv_1\quad, \tag{2-4}$$

である。Eq. (2－2) から、これらは

$$m^2=E^2-p^2\quad, \tag{2-5}$$

をみたす。

荷電粒子と電磁場との相互作用は $(\phi\quad A)$ を (4元) potentialとすると $(E\quad p)$ に置きかえ

$$E\to E-e\phi,\quad p\to p-eA\quad, \tag{2-6}$$

を行うことで得られる。そして、これらは

$$m^2=(E-e\phi)^2-(p-eA)^2\quad, \tag{2-7}$$

をみたす。proper Lorentz変換により、$(E\quad p)$ および $(E-e\phi,\ p-eA)$ は、それぞれ

$$\begin{pmatrix}E\\p\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}\\a_{10}&a_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\p\end{pmatrix}\quad, \tag{2-8}$$

および、

$$\begin{pmatrix}E-e\phi\\p-eA\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}\\a_{10}&a_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E-e\phi\\p-eA\end{pmatrix}\quad, \tag{2-9}$$

と変換する。

ここで、

$$\begin{aligned}&-a_{00}^2+a_{01}^2=-1,\quad -a_{00}a_{01}+a_{01}a_{11}=0,\\&-a_{10}^2+a_{11}^2=1,\end{aligned} \tag{2-10}$$

である。注意すべきは、Eq. (2－6)の移行は、Lorentz変換ではあらわせない、これはPoincaŕe変換の並進に対応している。

そこで、我々は我々の要請、すなわち、<u>電荷は相互作用によって、その値は変わることのない恒常的な不変量である</u>、という要請をみたすように、従来の理論を修正しよう。そのためには、自由粒子と相互作用とのincorporation、すなわち、$(E,\ p)\to(E-e\phi,\ p-eA)$ への移行をもLorentz変換 (Eq. (2－8) およびEq. (2－9)) をも含む一つのunitary変換内で実現することを考えよう。いいかえれば、(準) 回転 (Eq. (2－8) およびEq. (2－9)) と並進 (Eq. (2－6)) とを一つのunitary変換の内部で実現しよう。この際、Lorentz変換後の相互作用のincorporation $(E,p)'\to(E-e\phi,\ p-eA)'$ をも変換前の相互作用と同等の資格をもたなければならないから、相互作用のincorporation Eq. (2－6) はこの拡張されたunitary変換のLorentz変換に関する剰余空間 (群) でなければならない。

そこで、よく知られていることだが、回転と並進とを一つのunitary変換内で表現している数学には、古典的な射影幾何学に基づいて構築された非ユークッド幾何学がある。我々はこの数学を借用して、前述の電荷に関する要請を満たすようなtoy modelを作ろう。

ここでは最も簡単な場合を考えよう。前述の2次元Minkowski空間を射影空間とみなせば、この空間内の一点 $(x_0\ \ x_1)$ は同次座標で $(z_0\ \ z_1\ \ z_2)$ とかける。但し、$x_0=\dfrac{z_0}{z_2}$, $x_1=\dfrac{z_1}{z_2}$, である。このことは、通常の空間、$(x_0\ \ x_1)$ は同次座標でみれば速度空間に対応してることがわかる。

ここで、これら2つの変換を一つのunitary変換で表現できる最も簡単な表わし方は、$(z_0\ \ z_1\ \ z_2)$ が以下の変換

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} , \tag{2-11}$$

であらわされ、これがabsolute

$$-z_0^2+z_1^2+z_2^2=0 , \tag{2-12}$$

を不変にする変換であるとすることであろう。このことから、行列要素 $a_{\alpha\beta}, \alpha, \beta=0, 1, 2,$ は

$$\begin{aligned} &-a_{00}^2+a_{10}^2+a_{20}^2=-1, \quad -a_{00}a_{01}+a_{10}a_{11}+a_{20}a_{21}=0 \\ &-a_{01}^2+a_{11}^2+a_{21}^2=1, \quad -a_{00}a_{02}+a_{10}a_{12}+a_{20}a_{22}=0 \\ &-a_{02}^2+a_{12}^2+a_{22}^2=1, \quad -a_{01}a_{02}+a_{10}a_{12}+a_{21}a_{22}=0 \end{aligned} \tag{2-13}$$

をみたす。ここで、absoluteが

$$-z_0^2+z_1^2=0, \quad z_2^2=0, \tag{2-14}$$

とdegenerateした場合には、$a_{\alpha\beta}$ はEq.（2－10）の他に

$$a_{20}=a_{21}=0, \quad a_{22}=1, \tag{2-15}$$

をみたす。これよりEq.（2－11）は

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{02} \\ a_{12} \end{pmatrix} , \tag{2-16}$$

となる。この変換の右辺第一項はLorentz変換であり、また、右辺第二項は並進をあらわしている。

次に、この空間内の力学を考えよう。この空間内の無限小距離は

$$-ds^2=-dz_0^2+dz_1^2+dz_2^2 , \tag{2-17}$$

である。Eq.(2－3）に対応して、(4元）速度を

$$u_0=\frac{dz_0}{ds}, \quad u_1=\frac{dz_1}{ds}, \quad u_2=\frac{dz_2}{ds} , \tag{2-18}$$

とおこう。また、対応する（4元）momentumは

$$E=mu_0,\quad p_1=mu_1 \text{ および } p_2=mu_2, \tag{2-19}$$

とおく。ここで、(4元) potential(ϕ, A) の同次座標による表現を形式的に(φ, A_1, A_2) として、荷電粒子と電磁場との相互作用を

$$E\rightarrow P_0=E-e\varphi,\quad p_1\rightarrow P_1=p_1-eA_1, \text{ および } p_2\rightarrow P_2=p_2-eA_2, \tag{2-20}$$

とおこう。そして、これらは absolute

$$-P_0^2+P_1^2+P_2^2=0, \tag{2-21}$$

を不変にするものとする。このことにより、(P_0 P_1 P_2) は Eq.(2－11) と同じ変換

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \tag{2-22}$$

を行う。ここで、$a_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta, =0, 1, 2$ は Eq.(2－13) をみたす。Eq.(2－22) で

$$P_2'=P_2 \text{ および } a_{02}=a_{12}=0 \tag{2-23}$$

とおけば、これは Eq.(2－8) および Eq.(2－9) の proper Lorentz 変換となる。また、

$$P_2'=P_2 \text{ および } a_{02}=-e\phi,\quad a_{12}=-eA,$$

$$a_{00}=a_{11}=1, \text{ および } a_{01}=a_{10}=0 \tag{2-24}$$

とおけば、

$$P_0'=E-e\phi \text{ および } P_1'=P_1-eA, \tag{2-25}$$

となる。これは Eq.(2－6) であり、従来の理論における相互作用である。我々の modelでは、変換行列 Eq.(2－22)、すなわち

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{array}\right) \tag{2-26}$$

において、左上の2×2行列は proper Lorentz 変換をあらわし、右上の2×1行列は相互作用に対応している。

このようにして、我々の model では、相互作用が存在しても電荷の値は不変となるように、相互作用の効果は unitary 変換でおきかえた。そのために、変換行列 Eq.(2－26) の行列要素(a_{20}, a_{21}, a_{22}) の値に変化をきたし、z_2 成分ないしは P_2 成分に変化が生ずる。その結果、空間に歪みが生ずることになる。しかし、この歪みは極めて小さいであろう。

3 Model spaceの微分幾何学による扱い

この章では、前述の model space の扱いを容易にするために、これを微分幾何学の枠組で記述

しよう。

まず、2次元曲面を考えよう。この曲面上に一点をとり、その点において、曲面に接する方向をあたえれば、ただ一つの測地線がきまる。今、曲面上に測地線を一つとり、それをC_0とすれば、C_0上の各点を通りC_0に直交する測地線をとることが出来る。そこで、この直交する測地線をu曲線（v=一定）にとり、u曲線の直交截線をv曲線（u=一定）とする。ここで、曲線C_0は$u=0$であらわされるとしよう。このようにして、C_0を含む適当な近傍Uをとれば、そこでは、これらの測地線は互に交じらないようにすることが出来る。したがって、近傍Uに一つの直交座標系を導入することが出来る。

ここで、u曲線は測地線なので、この曲線の測地的曲率は0である。このことと、パラメータuの弧長を適当に規格化すると、この座標系に関して、曲面の無限小距離（第一基本形式）は、

$$ds^2=du^2+G(uv)dv^2 \ , \tag{3-1}$$

という形にかける。ここで、vを弧長にとれば、そのことと、C_0が測地線であることから

$$G(0\ \ v)=1 \ \text{および}\ \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{G(uv)}\Big|_{u=0}=0 \ , \tag{3-2}$$

が成立する。このとき、曲面の全曲率KとGとの関係は

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\sqrt{G}+K\sqrt{G}=0 \ , \tag{3-3}$$

であたえられる。

ここで、曲率が定曲率で、しかも、負のとき、すなわち

$$K=-\frac{1}{a^2}(a>0) \ , \tag{3-4}$$

の場合を考えよう。このとき、Eq.(3－3) より

$$\sqrt{G}=\frac{a}{2}(e^{\frac{u}{a}}+e^{-\frac{u}{a}})=a\cosh\frac{u}{a} \ , \tag{3-5}$$

であり、したがって

$$ds^2=du^2+a^2\cosh^2\frac{u}{a}dv^2 \ , \tag{3-6}$$

となる。

次に 、3次元ユークリッド空間内のxz平面上の曲線 $z=f(r)$ をz軸の周りに回転して得られる曲面で、曲率Kが Eq.(3－4) と同じ負の定数

$$\overline{K}=-\frac{1}{a^2} \quad (a>0) \ , \tag{3-7}$$

の場合を考えよう。この曲面は

$$x=r\cos\bar{v},\ y=r\sin\bar{v}\ ,\ z=f(r) \ , \tag{3-8}$$

であらわされる。この曲面上の無限小距離は

$$d\bar{s}^2=(1+f'^2(r))dr^2+r^2d\bar{v}^2 \ , \tag{3-9}$$

である。$f(r)$ は r のみの関数であるからパラメータ r を

$$\bar{u}=\int\sqrt{1+f'^2(r)}dr \ , \tag{3-10}$$

によって $\bar{u}$ に変換すれば、この無限小距離は

$$d\bar{s}^2=d\bar{u}^2+r^2\,d\bar{v}^2 \ , \tag{3-11}$$

とかける。この式と Eq.(3－1) とを比較すれば

$$r^2=G=\bar{G}(\bar{u}) \ , \tag{3-12}$$

となる。Eq.(3－3) と Eq.(3－7) とから

$$\sqrt{\bar{G}}=A\,e^{\frac{u}{a}}+B\,e^{-\frac{u}{a}}\ (A, B\text{は定数}) \ , \tag{3-13}$$

をうる。一方、Eq.(3－10) より $f(r)$ を正にとれば

$$f(r)=\int\sqrt{1-\left(\frac{dr}{d\bar{u}}\right)^2}d\bar{u} \ , \tag{3-14}$$

であるから

$$r=A\,e^{\frac{u}{a}}+B\,e^{-\frac{u}{a}} \ , \tag{3-15}$$

$$z=f(r)=\int\sqrt{1-\frac{1}{a^2}(A\,e^{\frac{u}{a}}+B\,e^{-\frac{u}{a}})^2d\bar{u}} \ ,$$

となる。ここで、特別な場合として

$$A=0,\quad B=a \tag{3-16}$$

とおけば

$$r=\sqrt{\bar{G}}=ae^{-\frac{u}{a}} \tag{3-17}$$

であるから、回転曲面は

$$x=ae^{-\frac{u}{a}}\cos\bar{v},\quad y=ae^{-\frac{u}{a}}\sin\bar{v} \ ,$$

$$z=\int\sqrt{1-e^{-\frac{2u}{a}}}\,d\bar{u} \ , \tag{3-18}$$

となり、無限小距離は

$$d\bar{s}^2=d\bar{u}^2+a^2e^{-\frac{2u}{a}}d\bar{v}^2 \ , \tag{3-19}$$

となる。よって、定曲率曲面上の点(u, v)と回転曲面上の点$(\bar{u}, \bar{v})$との間に

$$\begin{cases} \bar{u}=u \\ \bar{v}=\dfrac{1}{2}(e^{\frac{2u}{a}}+1)v \end{cases} , \tag{3-20}$$

なる対応をつければ

$$d\bar{s}^2=ds^2 , \tag{3-21}$$

であり、これらの2つの曲面は等長対応をなす。したがって、これらの結果から、定曲率曲面上の議論は回転曲面上の議論にうつしかえることが出来る。また、その逆もなりたつことがわかる。

次に、前述の2次元回転曲面を4次元回転曲面に拡張しよう。そのために、まず、5次元ユークリッド空間を考えよう。この空間内に直交座標系を設置し、座標軸を x−, y−, z−, t− およびκ−軸としよう。そして、$x-\kappa$ 平面上の曲線$\kappa=f(r)$ をκ− 軸の周りに回転して得られる曲面を考えよう。この曲面は θ_1, θ_2 および θ_3 をパラメータとして$s_a\equiv sin\theta_a$, $c_a\equiv cos\theta_a$, $a=1, 2, 3$ とおけば

$$(x=rc_1c_2c_3,\ y=rc_1c_2s_3,\ z=rc_1s_2,\ t=rs_1,\ \kappa=f(r)) , \tag{3-22}$$

とかける。2次元回転曲面の場合と同様の議論から、曲率が負の定数

$$K=-\frac{1}{a^2}, (a>0) , \tag{3-23}$$

に対しては、uをθ_0でおきかえて、

$$r^2=G(\theta_0) \quad \text{および} \quad \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\theta_0}+K\sqrt{G}=0 ,$$

但し
$$\theta_0=\int\sqrt{1+f'^2(r)}dr , \tag{3-24}$$

が成立する。これより

$$\begin{cases} r=Ae^{\frac{\theta_0}{a}}+Be^{-\frac{\theta_0}{a}} , \\ \kappa=\displaystyle\int\sqrt{1-\left(\frac{A}{a}e^{\frac{\theta_0}{a}}-\frac{B}{a}e^{-\frac{\theta_0}{a}}\right)^2}d\theta_0 \end{cases} \tag{3-25}$$

をうる。ここで、2次元曲面の場合と同様、

$$A=0 \quad \text{および} \quad B=a , \tag{3-26}$$

とおこう。この場合、この曲面上の無限小距離は

$$\bar{d}s^2=d\theta_0^2+a^2e^{-\frac{2\theta_0}{a}}(d\theta_1^2+c_1^2d\theta_2^2+c_1^2c_2^2d\theta_3^2) , \tag{3-27}$$

となる。これより、この空間の contravariant な metric tensor は

$$
(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2e^{-\frac{2\theta_0}{a}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2e^{-\frac{2\theta_0}{a}}c_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2e^{-\frac{2\theta_0}{a}}c_1^2c_2^2 \end{pmatrix}, \tag{3-27}
$$

であり、また、covariantな metric tensorは

$$
(g^{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2}e^{\frac{2\theta_0}{a}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2}e^{\frac{2\theta_0}{a}}\frac{1}{c_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2}e^{\frac{2\theta_0}{a}}\frac{1}{c_1^2}\frac{1}{c_2^2} \end{pmatrix}, \tag{3-28}
$$

である。また volume elementは

$$
dV=\sqrt{\|g_{\alpha\beta}\|}=a^3e^{-\frac{3\theta_0}{a}}c_1^2c_2d\theta_0d\theta_1d\theta_2d\theta_3 \ , \tag{3-29}
$$

となる。

4 Model spaceにおけるscalar particleの wave equationおよび wave functionの完全直交性

model spaceが設定されたので、この空間内での物理を考えよう。まず、最も簡単な場合として、scalar particleの wave equationを求めよう。scalar fieldをϕとすると wave equationは

$$
\begin{aligned}
\Lambda\phi &\equiv g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi \\
&= g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\partial_\beta+\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\gamma)\phi \ ,
\end{aligned} \tag{4-1}
$$

ここで

$$
\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\equiv\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(\partial_\alpha g_{\delta\beta}+\partial_\beta g_{\alpha\delta}-\partial_\delta g_{\alpha\beta}) \ , \tag{4-2}
$$

であるとしよう。この$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$は Eq.(3－27) および Eq.(3－28) を用いて具体的に計算すると

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^0_{11}=a^2e^{-\frac{2\theta_0}{a}}, \quad \Gamma^0_{22}=ae^{-\frac{2\theta_0}{a}}c_1^2, \quad \Gamma^0_{33}=ae^{-\frac{2\theta_0}{a}}c_1^2c_2^2 \ , \\
&\Gamma^1_{01}=(-)\frac{1}{a}, \quad \Gamma^1_{22}=s_1c_1, \quad \Gamma^1_{33}=s_1c_1c_2^2 \\
&\Gamma^2_{02}=(-)\frac{1}{a}, \quad \Gamma^2_{12}=(-)\frac{s_1}{c_1}, \quad \Gamma^2_{33}=s_2c_2, \\
&\Gamma^3_{03}=(-)\frac{1}{a}, \quad \Gamma^3_{13}=(-)\frac{s_1}{c_1}, \quad \Gamma^3_{23}=(-)\frac{s_2}{c_2},
\end{aligned} \tag{4-3}
$$

となる。Eq.(4－3) の$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$の値を用いて、Eq.(4－1) より、$\theta_0, \theta_1, \theta_2$ およびθ_3 の関数を、それぞれ略記号0, 1, 2,および 3, であらわせば

$$\Lambda \equiv \Lambda_0 + \frac{e^{\frac{2\theta_0}{a}}}{a^2} \Lambda_{123}, \tag{4-4}$$

ここで

$$\Lambda_0 \equiv \partial_0^2 + \frac{3}{a}\partial_0 \ , \tag{4-5}$$

および

$$\Lambda_{123} \equiv \Lambda_1 + \frac{1}{c_1^2}\Lambda_2 + \frac{1}{c_1^2 c_2^2}\Lambda_3 \ , \tag{4-6}$$

であり、また、$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ は、各々

$$\Lambda_1 \equiv \partial_1^2 + 2\frac{s_1}{c_1}\partial_1 \ , \tag{4-7}$$

$$\Lambda_2 \equiv \partial_2^2 + \frac{s_2}{c_2}\partial_2 \ , \tag{4-8}$$

および

$$\Lambda_3 \equiv \partial_3^2 \ , \tag{4-9}$$

となる。wave equation

$$\Lambda \Phi_{(0123)} = 0 \ , \tag{4-10}$$

は変数分離が出来て

$$\Phi_{(0123)} \equiv \phi_\lambda(0)\phi_\mu(1)\phi_\nu(2)\phi_\delta(3) \ , \tag{4-11}$$

とおけば

$$(\Lambda_0 - \frac{1}{a^2} e^{\frac{2\theta_0}{a}})\phi_\lambda(0) = 0 \ , \tag{4-12}$$

$$(\Lambda_1 + \mu - \frac{1}{c_1^2}\nu)\phi_\mu(1) = 0 \ , \tag{4-13}$$

$$(\Lambda_2 + \nu - \frac{1}{c_2^2}\delta)\phi_\gamma(2) = 0 \ , \tag{4-14}$$

および

$$(\Lambda_3 + \delta)\phi_\delta(3) = 0 \ , \tag{4-15}$$

となる。

これらの wave function の直交性および完備性は

(i) $\phi_\lambda(0)$ に対しては、$z_0 = \theta_0$ とおいて、Eq.(5－8) より

$$\int \phi_\lambda^*(z_0)\phi_{\lambda'}(z_0) e^{\frac{3z_0}{2}} dz_0 = \delta_{\lambda\lambda'}$$

および $\sum_\lambda \phi_\lambda(z_0)\phi_\lambda^*(z'_0)e^{\frac{3z_0}{2}}=\delta(z_0-z'_0)$, (4−16)

(ii) $\phi_\mu(1)$ に対しては、$z_1=s_1$ とおいて

$$\int\frac{\phi_\mu^*(z_1)\phi_\mu(z_1)}{(1-z_1^2)^{3/2}}dz_1=\delta_{\mu\mu}'$$

および $\sum_\mu \frac{\phi_\mu(z_1)\phi_\mu^*(z'_1)}{(1-z_1^2)^{3/2}}=\delta(z_1-z_1')$, (4−17)

(iii) $\phi_\nu(2)$ に対しては、$z_2=s_2$ とおいて

$$\int\frac{\phi_\nu^*(z_2)\phi_\nu'(z_2)}{1-z_2^2}dz_2=\delta_{\nu\nu}'$$

および $\sum_\mu \frac{\phi_\mu(z_2)\phi_\mu^*(z'_2)}{1-z_2^2}=\delta(z_2-z_2')$, (4−18)

(iv) $\phi_\delta(3)$ に対しては $z_3=\theta_3$ とおいて

$$\int\phi_\delta^*(z_3)\phi_\delta'(z_3)dz_3=\delta_{\delta\delta}'$$

および $\sum_\delta \phi_\delta(z_3)\phi_\delta(z_3')=\delta(z_3-z_3')$, (4−19)

である。(証明は Appendix をみよ)

5 Model spaceにおけるGreen関数、すなわち、propagator

前章までで、数学的準備が出来たので、この章では、我々の model space における Green 関数を導出しよう。ある時刻 $\bar{t}$, 位置 $\bar{x}$ での wave function $\Psi(\bar{x}\ \bar{t})$ がわかっているとしよう。時刻 $\bar{t}$ より後の時刻 t における wave function は、Huygens の原理に従って、時刻 $\bar{t}$ におけるあらゆる点 $\bar{x}$ での波が源となって発生した波を重ね合わせたものである。その比例定数を

$$iG(xt:\bar{x}\bar{t}) \ , \tag{5-1}$$

とすれば、これが Green 関数である。相互作用 V があれば、歪んだ波 $V\Psi(\bar{x}\bar{t})$ が源となるから、Huygens の原理に従って、$\Psi(x,\ t)$ は $V\Psi(\bar{x}\bar{t})$ の重ね合せ、

$$\Psi(xt)=i\int G(xt,\ \bar{x}\bar{t})V\Psi(\bar{x}\bar{t})d\bar{x},\ t>\bar{t} \ , \tag{5-2}$$

であたえられる。我々の model space に"うめこまれた"相互作用を $\delta\Lambda$ とすれば、wave equation は

$$(\Lambda+\delta\Lambda)\Psi(z_0z_1z_2z_3)=0 \ , \tag{5-3}$$

である。$\delta\Lambda=0$ のとき、

$$\Psi(z_0z_1z_2z_3)=\phi_\lambda(z_0)\phi_\mu(z_1z_2z_3) \ , \tag{5-4}$$

但し $$\phi_\mu(z_1z_2z_3)\equiv\phi_\mu(z_1)\phi_\nu(z_2)\phi_\delta(z_3) \ , \tag{5-5}$$

とおけば、

$$\Lambda_{123}\ \ \phi_\mu(z_1z_2z_3)=-\mu\phi_\mu(z_1z_2z_3)\ , \tag{5-6}$$

が成り立つから、

$$\Lambda\Psi(z_0z_1z_2z_3)=(\lambda-\mu e^{\frac{2z_0}{a}})\phi_\lambda(z_0)\phi_\mu(z_1z_2z_3)\ , \tag{5-7}$$

となる。但し、ここで、Eq.(4－12), Eq.(4－13), Eq.(4－14) および Eq.(4－15) を用い、また

$$(\Lambda_0-\lambda)\phi_\lambda(z_0)=0\ , \tag{5-8}$$

とおいた。Eq.(5－7) の左から $\phi_\mu^*(z_1z_2z_3)\frac{1}{(1-z_1^2)^{3/2}(1-z_2^2)}$ をかけて、Eq.(4－17), Eq.(4－18)、Eq.(4－19) および、Eq.(4－16) を用いると

$$\delta_{\mu\mu'}(\lambda\delta_{\lambda\lambda'}-\mu<\lambda'|e^{\frac{5z_0}{a}}|\lambda>)=0\ , \tag{5-9}$$

をうる。これより、

$$\lambda-\mu<\lambda|e^{\frac{5z_0}{a}}|\lambda=0\ , \tag{5-10}$$

および

$$<\lambda'|e^{\frac{5z_0}{a}}|\lambda>=0,\ \text{for}\quad \lambda'\neq\lambda\ , \tag{5-11}$$

となる。

次に、我々の model space における Green 関数を導出しよう。まず、Eq.(5－3) における $\Psi(z_0z_1z_2z_3)$ は始状態 μ の混合であるとしよう。これを $\Phi_\mu(z_1z_2z_3)$ で展開すれば

$$\Psi(z_0z_1z_2z_3)=\sum_\mu A_\mu(z_0)\phi_\mu(z_1z_2z_3)\ , \tag{5-12}$$

とかける。これを Eq. (5－3) に代入すれば、

$$\begin{aligned}&\sum_\mu(\Lambda_0-\mu e^{\frac{2z_0}{a}})A_\mu(z_0)\phi_\mu(z_1z_2z_3)\\&=(-)\delta\Lambda\,\Psi(z_0z_1z_2z_3)\ ,\end{aligned} \tag{5-13}$$

となる。この式の左辺から $\phi_\mu^*(z_1z_2z_3)\frac{1}{(1-z_1^2)^{3/2}}\times\frac{1}{1-z_2^2}$ をかけて、$(z_1z_2z_3)$ で積分すれば、Eq.(4－17), Eq.(4－18) および Eq.(4－19) の直交性から、

$$\begin{aligned}&(\Lambda_0-\mu e^{\frac{2z_0}{a}})A_\mu(z_0)\\&=(-)\int\phi_\mu^*(z_1z_2z_3)\delta\Lambda\,\Psi(z_0z_1z_2z_3)\times\frac{1}{(1-z_1^2)^{3/2}}\frac{1}{1-z_2^2}dz_1dz_2dz_3\ ,\end{aligned} \tag{5-14}$$

となる。次に、$A_\mu(z_0)$ を $\phi_\lambda(z_0)$ で展開すれば

$$A_\mu(z_0)=\sum_\lambda a_\mu^\lambda\phi_\lambda(z_0)\ , \tag{5-15}$$

これを Eq. (5－14) に代入すれば

$$\sum_\lambda a_\mu^\lambda(\lambda-\mu e^{\frac{2z_0}{a}})\phi_\lambda(z_0)$$

$$=(-)\int\phi_\mu^*(z_1z_2z_3)\delta\Lambda\,\Psi(z_0z_1z_2z_3)\frac{1}{(1-z_1^2)^{3/2}}\frac{1}{(1-z_2^2)}dz_1dz_2dz_3\ , \qquad (5-16)$$

となる。

Eq.(5−16) の左から$\phi_{\lambda'}^*(z_0)e^{\frac{3z_0}{a}}$をかけ、直交性 Eq.(4−16) を用い、更に、λ'をλでおきかえれば

$$a_\mu^\lambda(\lambda-\mu<\lambda|e^{\frac{5z_0}{a}}|\lambda>)$$
$$=(-)\iint\phi_\lambda^*(z_0)\phi_\mu^*(z_1z_2z_3)\delta\Lambda\cdot\Psi(z_0z_1z_2z_3)d\sigma \qquad (5-17)$$

但し
$$d\sigma\equiv\frac{e^{\frac{3z_0}{a}}}{(1-z_1^2)^{3/2}(1-z_2^2)}dz_0dz_1dz_2dz_3 \qquad (5-18)$$

をうる。ここで、Eq.(5−17) を導出する際に、Eq.(5−11) を用いた。Eq.(5−17) からa_μ^λを求めて、Eq.(5−15) に代入し、更に、それをEq.(5−12) に代入すれば、

$$\Psi(z_0z_1z_2z_3)$$
$$=\sum_\mu\iint\sum_\lambda\phi_\lambda(z_0)\phi_\mu(z_1z_2z_3)\frac{1}{\lambda-\mu<\lambda|e^{\frac{5z_0}{a}}|\lambda>}\times(-)\phi_\lambda^*(\overline{z_0})\phi_\mu(\overline{z_1z_2z_3})\delta\Lambda\,\Psi(\overline{z_0},\overline{z_1z_2z_3})d\overline{\sigma} \qquad (5-19)$$

をうる。ここで、積分変数には、文字の上にbarをつけた。これをEg. (5−2) と比較すれば

$$G_\mu(z_0z_1z_2z_3:\overline{z_0}\overline{z_1z_2z_3})$$
$$\equiv i\sum_\lambda\phi_\lambda(z_0)\phi_\mu(z_1z_2z_3)\frac{1}{\lambda-\mu<\lambda|e^{\frac{5z_0}{a}}|\lambda>}\times\phi_\lambda^*(\overline{z_0})\phi_\mu^*(\overline{z_1z_2z_3})\ , \qquad (5-20)$$

をうる。Eq.(5−20) が我々のmodel spaceにおけるGreen関数である。

ここで注意すべきは固有値λは$\lambda=p\left(p+\frac{3}{a}\right)$の形であたえられるであろう。しかし、wave function $|\lambda>$, および、それについての和$\sum_\lambda$は正確には$|p>$および$\sum_p$とかくべきであろう。

しかし、これで発散が除去されているかどうかが明らかにされたわけではない。今後、Green関数等をもっと詳細に解析していく必要があろう。そして、何よりも重要なことは、これまで展開してきた理論が物理学として体をなしているか、または、体をなす発展可能性を秘めているかどうかという問題がある。実験との比較検討がなされなければならない。

この研究は、対象が物理学全般に亘っていて、巨大であり、考える領域が途方もなく広大なので、誤り、思い違い、考え違い等、いたるところ多々あるであろう。今後、試行錯誤をくり返しながら 、何回も塗り直して考えて行く必要があろう。

Appendix

Wave functionの直交性および完全性

A）完全性

vectorの規格直交基底$\{a_i\}$について

$$a_i^* a_j = \delta_{ij} \quad , \tag{A-1}$$

vector A を$\{a_i\}$で展開すれば、

$$A = \sum_i a_i A_i \quad , \tag{A-2}$$

よって、

$$a_k^* A = \sum_i a_k^* a_i A_i = \sum_i \delta_{ki} A_i = A_k \quad , \tag{A-3}$$

これより

$$A = \sum_i a_i a_i^* A \quad , \tag{A-4}$$

したがって、

$$\sum_i a_i a_i^* = I \quad , \tag{A-5}$$

B) 直交性

a)

$$\Lambda_u \equiv \partial_u^2 + \frac{3}{a} \partial_u \quad , \tag{a-1}$$

とおいて、Eq.(5−8）は

$$(\Lambda_u - \lambda) \phi_\lambda(u) = 0 \quad \text{or} \quad \phi_\lambda'' + \frac{3}{a} \phi_\lambda' - \lambda \phi_\lambda = 0 \quad , \tag{a-2}$$

$$\Phi_\lambda \equiv e^{\frac{3u}{a}} \phi_\lambda' \quad , \tag{a-3}$$

とおいてEq.(a−2）は

$$\Phi_\lambda' = \lambda e^{\frac{3u}{a}} \phi_\lambda \quad , \tag{a-4}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 - \lambda_2) \int \phi_1^* \phi_2 e^{\frac{3u}{a}} du \\
&= \int (\phi_2^* \Phi_1' - \phi_1^* \Phi_2') du = (\phi_2^* \Phi_1 - \phi_1^* \Phi_2) \Big|_{\text{boundary.}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{a-5}$$

したがって、

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ ならば } \int \phi_1^* \phi_2 e^{\frac{3u}{a}} du = 0. \tag{a-6}$$

これより規格化は

$$\int \phi_1^* \phi_2 e^{\frac{3u}{a}} du = \delta_{12} \quad , \qquad (a-7)$$

また、完全性は

$$\sum_\lambda \phi_\lambda(u)\phi_\lambda^*(\bar{u}) e^{\frac{3u}{a}} = \delta(u-\bar{u}) \quad , \qquad (a-8)$$

である。

b) $\gamma=0$ とおくと Eq.(4－13) は

$$\Lambda_1 \equiv \partial_1^2 + \frac{2s_1}{c_1}\partial_1 \quad , \qquad (b-1)$$

とおいて

$$(\Lambda_1-\mu)\phi_\mu(1)=0. \qquad (b-2)$$

となる。

$z_1 \equiv s_1$ とおいて、Eq.(b－2) は

$$(1-z_1^2)\frac{\partial^2\phi_\mu}{\partial z_1^2} + z_1\frac{\partial\phi_\mu}{\partial z_1} - \mu\phi_\mu = 0 \quad , \qquad (b-3)$$

となる。またこれを書き直すと

$$\left((1-z_1^2)^{-\frac{1}{2}}\phi_\mu'\right)' = \frac{\mu}{(1-z_1^2)^{-\frac{3}{2}}}\phi_\mu \quad , \qquad (b-4)$$

となる。これより、

$$\begin{aligned}
&(\mu_1-\mu_2)\int \frac{\phi_1^*\phi_2}{(1-z_1^2)^{-\frac{2}{3}}} dz_1 \\
&= \int\left\{\phi_2^*\left((1-z_2^2)^{-\frac{1}{2}}\phi'_1\right)' - \phi_1^*\left((1-z_1^2)^{-\frac{1}{2}}\phi'_2\right)'\right\} dz_1 \\
&= \frac{1}{(1-z_1^2)^{\frac{1}{2}}}(\phi_1'^*\phi_2 - \phi_2^{*\prime}\phi_1)\Big|_{\text{boundary}} = 0 \quad , \qquad (b-5)
\end{aligned}$$

したがって、規格化は、

$$\int \frac{\phi_1^*\phi_2}{(1-z_1^2)^{-\frac{2}{3}}} dz_2 = \delta_{12} \quad , \qquad (b-6)$$

また、完全性は

$$\sum_\mu \frac{\phi_\mu(z_1)\phi_\mu^*(\overline{z_0})}{(1-z_1^2)^{-\frac{2}{3}}} = \delta(z_1-\bar{z}_1) \quad , \qquad (b-7)$$

である。

c) $\delta=0$ とおいて Eq.(4－14) は

$$(\Lambda_2-\gamma)\phi_\gamma(2)=0 \quad \text{但し} \quad \Lambda_2\equiv\partial_2^2+\frac{s_2}{c_2}\partial_2 \quad , \qquad (c-1)$$

$z_2=s_2$ とおけば　Eq.(4－14) は

$$(1-z^2)\phi_\gamma'' + \nu\,\phi_\gamma = 0 \quad , \tag{c-2}$$

となる。これより、

$$(\nu_1-\nu_2)\int\frac{\phi_1^*\phi_2}{1-z_2^2}dz_2 = \int(\phi_1^*\phi_2''-\phi_2^*\phi_1'')dz_2 = (\phi_1^*\phi_2'-\phi_2^*\phi_1')\Big|_{\text{boundary}} = 0 \quad . \tag{c-3}$$

したがって、規格化は

$$\int\frac{\phi_1^*\phi_2}{1-z_2^2}dz_2 = \delta_{12} \quad . \tag{c-4}$$

また、完全性は

$$\sum_\gamma\frac{\phi_\gamma(z_2)\phi_\gamma^*(\bar{z}_2)}{1-z_2^2} = \delta(z_2-\bar{z}_2) \quad . \tag{c-5}$$

である。

c) $\phi_\delta(3)$ については明白

References

1) 法政大学多摩研究報告15；65－75, 2000.

法政大学多摩研究報告14;55－67, 1999.

2) Physical Review Letters 83； 3371 (1999)